

موازی سازی بازسازی تصویر PET به روش بیشینه کردن تابع درستنمایی بر مبنای الگوریتم SAGE

مهدي رضائیان^۱ حميد سلطانیان زاده^۲

دانشکده فنی - دانشگاه تهران

آدرس: تهران - خیابان کارگر شمالی - بعد از بزرگراه جلال آل احمد - ساختمان پردیس ۲

۱- ساختمان گروه مهندسی نقشه برداری، تلفن: ۸۰۰۸۸۴۱ فاکس: ۸۰۰۸۸۳۷

پست الکترونیکی: mrezaeian@ut.ac.ir

۲- گروه مهندسی برق و کامپیوتر دانشکده فنی دانشگاه تهران و موسسه پزشکی فورده آمریکا

پست الکترونیکی: hamids@rad.hfh.edu

چکیده: پرتونگاری مقطعی به روش نشر پوزیترون (PET) یک روش مطرح تصویربرداری پزشکی است. روشهای آماری بازسازی برای تصاویر PET عملکرد بسیار مناسبی دارند. این روشها نیاز به حجم محاسباتی بالا دارند. بکارگیری پردازشگرهای موازی می تواند این مشکل را حل کند. روش ML-EM قابلیت اجرای موازی را دارد ولی نرخ همگرایی آن کند است. الگوریتم ML-SAGE-3 از سرعت همگرایی بالایی برخوردار است ولی قابلیت موازی شدن را ندارد. این تحقیق سعی دارد تا یک روش بینابینی تحت عنوان Parallel ML-SAGE را مورد بررسی قرار داده و نرخ همگرایی آنرا با دو روش فوق مقایسه کند.

کلمات کلیدی: PET, ML-EM, ML-SAGE, بازسازی تصویر, بیشینه کردن تابع درستنمایی.

۱- مقدمه

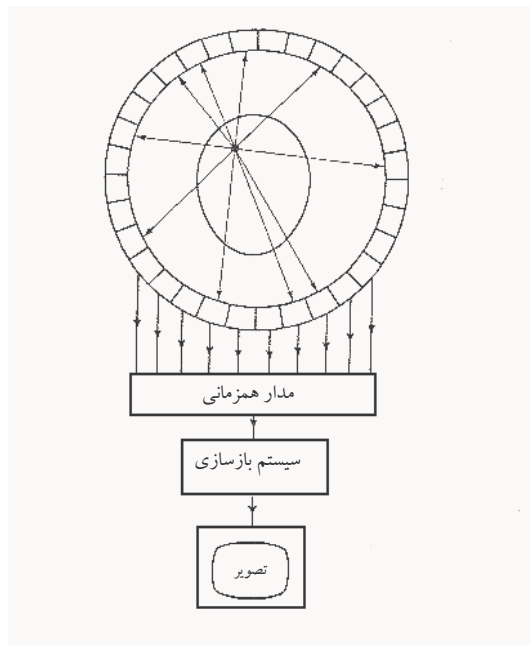
هدف از تصویربرداری در پزشکی هسته ای تهیه نگاشتهایی از فیزیولوژی و عملکرد بافت می باشد. پرتونگاری مقطعی با نشر پوزیترون^۱ یکی از روشهای مطرح تصویربرداری است که در یک دهه اخیر بسیار مورد توجه بوده است. در این روش با استفاده از موادی که از خود پوزیترون تشعشع می کنند تصاویر دقیقی از عملکرد بافتهایی همچون مغز، قلب، ریه، کبد و یا حتی بصورت یک تصویر کامل از بدن^۲ تهیه می شود. پوزیترونی که از رادیویزوتوپ خارج می شود، پس از طی مسافتی کوتاه به یک الکترون برخورد کرده و راه نابودی^۳ را طی می کند. این فرآیند دو فوتون با انرژی بالای ۵۱۱ Kev ایجاد می کند که در راستای مخالف یکدیگر منتشر می شوند. فوتونهای مذکور توسط آشکارسازهایی که بطور حلقوی شخص را احاطه کرده اند آشکار می شوند. اگر دو فوتون آشکار شده درون یک پنجره زمانی کوتاه قرار بگیرد بعنوان یک رویداد صحیح مربوط به این دو آشکارساز ثبت می شوند. اصطلاحاً خط پاسخ بین هر دو آشکارساز را یک "تیوب" می نامند. به این ترتیب با شمارش تعداد فوتونها در هر تیوب، تقریبی از انتگرال خطی در راستای آن تیوب بدست می آید. در تصویربرداری دو بعدی، این انتگرال خطی یا

¹ Positron Emission Tomography (PET)

² Whole body PET

³ Annihilation

پروجکشن، تقریب گسسته‌ای از تبدیل ریدان را نتیجه می‌دهد (شکل ۱). هدف ما در بازسازی تصویر این است که از روی داده‌های جمع‌آوری شده توسط اسکنر به تصویری برسیم که نشان‌دهنده توزیع رادیوایزوتوپ در بافت مورد مطالعه باشد. اطلاعات جمع‌آوری شده توسط آشکارسازها را می‌توان بصورت یک ماتریس ذخیره کرد. این ماتریس که ستونهای آن متناظر با نمونه‌های هر پروجکشن و سطرهاى آن متناظر با زاویه‌ای است که آن پروجکشن با خط افقی دارد را سینوگرام^۴ گویند.



شکل ۱. ساختار کلی یک سیستم تصویربرداری PET

روشهایی نظیر روش FBP^۵ بخاطر اینکه از تمامی حقایق آماری حاکم بر سیستم PET صرف‌نظر می‌کند، نمی‌تواند تصاویری با کیفیت مناسب ایجاد کند. در مقابل در روشهای آماری، علاوه بر اینکه مبانی حاکم بر یک مدل آماری را رعایت می‌کنند، می‌توانند برای سیستم‌های متغیر با مکان^۶ نیز کارایی داشته باشند [1]. عموماً روشهای آماری به الگوریتمهای تکراری منجر می‌شوند و حجم محاسبات آنها بسیار زیاد است و به همین دلیل یکی از زمینه‌های مورد علاقه بسیاری از محققین، چگونگی افزایش سرعت همگرایی این نوع الگوریتم‌ها است. استفاده از روش ML-EM^۷ منجر به رابطه‌ای تکراری می‌شود که سرعت همگرایی آن کُند است ولی در عوض می‌توان آنرا بر روی سیستم‌های موازی اجرا کرد. یکی از روشهایی که بهبود قابل توجهی در سرعت همگرایی این الگوریتم داده است روشی موسوم به ML-SAGE^۸ می‌باشد. علی‌رغم اینکه سرعت همگرایی این روش از الگوریتم ML-EM بیشتر است ولی قابلیت اجرای موازی را از دست داده است. در این تحقیق ما سعی کرده‌ایم تا امکان موازی شدن الگوریتم ML-SAGE را مورد بررسی قرار دهیم.

۲- تئوری

۲-۱ الگوریتم ML-EM

مناسبترین توزیع آماری برای سیستم شمارشی PET، توزیع پواسن می‌باشد [2]. تعداد جفت فوتونهای تشعشع شده از پیکسل j ام متغیر تصادفی پواسن n_j با میانگین λ_j خواهد بود:

$$P(n_j = k) = e^{-\lambda_j} \frac{\lambda_j^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

ماتریسی که هر آرایه از آن بصورت زیر تعریف می‌شود را ماتریس انتقال گویند:

$$p_{ij} = P(\text{تشعشع از پیکسل } j \text{ ام} / \text{آشکار شدن توسط تیوب } i \text{ ام}) \quad (2)$$

متغیر تصادفی y_{ij} را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$y_{ij} = \text{تعداد جفت فوتونهایی که از پیکسل } j \text{ ام تشعشع می‌کنند و توسط تیوب } i \text{ ام آشکار می‌شوند} \quad (3)$$

y_{ij} دارای توزیع پواسن با میانگین $p_{ij}\lambda_j$ خواهد بود:

$$y_{ij} \sim \text{Poisson}\{p_{ij}\lambda_j\} \quad (4)$$

⁴ Sinogram

⁵ Filtered Back Projection

⁶ Spatial-variant system

⁷ Maximum Likelihood with Expectation Maximization

⁸ ML-Space Alternating Generalized Expectation-Maximization

بنابراین تعداد کل جفت فوتونهای آشکار شده در هر تیوب برابر است با:

$$y_i = \sum_{j=1}^B y_{ij} + R_i \quad (5)$$

که B تعداد کل پیکسلها است و R_i متغیر تصادفی دیگری است که معرف عواملی همچون همرویدادهای تصادفی⁹ و یا رویدادهای تفرقی¹⁰ می‌باشد. با فرض اینکه میانگین این متغیر تصادفی مقدار معلوم r_i باشد:

$$R_i \sim \text{Poisson}\{r_i\} \quad (6)$$

از آنجایی که متغیر تصادفی پواسن دارای توزیع احتمال پایدار است (جمع چند متغیر تصادفی پواسن یک متغیر تصادفی پواسن می‌شود) بنابراین:

$$y_i \sim \text{Poisson}\left\{\sum_{j=1}^B p_{ij}\lambda_j + r_i\right\} \quad (7)$$

آنچه که بعنوان داده‌های نهایی از اسکنر دریافت می‌شود مشاهده‌ای از نمونه‌های فرآیند تصادفی در یک بازه زمانی خواهد بود. با فرض ایستا بودن در این بازه زمانی، این مشاهدات را y_i^* می‌نامیم. به این ترتیب هدف این است که از روی بردار \mathbf{y}^* ، λ را تخمین بزنیم. تابع درستنمایی $L(\lambda)$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$L(\lambda) = P(\mathbf{y} = \mathbf{y}^* / \lambda) = \prod_{i=1}^D \left(e^{-\bar{y}_i(\lambda)} \frac{\bar{y}_i(\lambda)^{y_i^*}}{y_i^*!} \right) \quad (8)$$

$$\bar{y}_i(\lambda) = \sum_{j=1}^B p_{ij}\lambda_j + r_i$$

که در صورت ماکزیمم کردن لگاریتم آن به رابطه تکرارشونده زیر می‌رسیم [2]:

$$\hat{\lambda}_k^{(i+1)} = \frac{1}{p_k} \hat{\lambda}_k^{(i)} \frac{\sum_{m=1}^D y_m^* p_{mk}}{\sum_{j=1}^B \hat{\lambda}_j^{(i)} p_{mj} + r_m} \quad k = 1, 2, \dots, B, i = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

در این رابطه $p_k = \sum_{i=1}^D p_{ik}$ و $\hat{\lambda}$ تخمینی از λ است که تابع درستنمایی را ماکزیمم می‌کند.

۲-۲ الگوریتم ML-SAGE

بازسازی تصویر در PET در واقع نوعی "تخمین تصویر" می‌باشد، بنابراین روشهایی که برای حل این نوع مسائل وجود دارد می‌توانند در بازسازی تصویر PET نیز کارساز باشند. اگر بردار تصادفی \mathbf{Y} با تابع چگالی احتمال $f(\mathbf{y}; \lambda_{true})$ را در نظر بگیریم که در آن λ_{true} بردار پارامتر متعلق به مجموعه‌ای از فضای n بعدی \mathcal{R} است، با فرض مشاهده \mathbf{y} از بردار تصادفی $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$ می‌خواهیم بردار $\hat{\lambda}$ طوری پیدا کنیم که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\hat{\lambda}^{\Delta} = \arg \max \Phi(\hat{\lambda}) \quad (10)$$

$$\Phi(\hat{\lambda})^{\Delta} = \log f(\mathbf{y}; \hat{\lambda})$$

⁹ Accidental coincidence

¹⁰ Scattered events

حل مستقیم رابطه (۱۰) منجر به رابطه (۹) می‌شود که همان الگوریتم ML-EM را نتیجه می‌دهد.

تعریف: مجموعه S را به عنوان یک مجموعه اندیس^{۱۱} تعریف می‌کنیم اگر ۱- غیر تهی باشد ۲- زیر مجموعه‌ای از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد ۳- عضو تکراری نداشته باشد. \tilde{S} را متمم S گویند. بنابراین اگر S دارای m عنصر باشد، منظور از λ_S یک بردار m بعدی است که شامل m عنصر از بردار λ با اندیسهای مشخص شده توسط مجموعه S می‌باشد. تابعی نظیر $\Phi(\lambda)$ که تابعی از یک بردار هستند را می‌توانیم با توجه به مجموعه S بصورت تابعی از دو بردار λ_S و $\lambda_{\tilde{S}}$ نمایش دهیم بعبارت دیگر $\Phi(\lambda_S, \lambda_{\tilde{S}}) = \Phi(\lambda)$. روش SAGE با معرفی یک فضای پنهان داده^{۱۲} نسبت به λ_S و بر مبنای ساختار آماری تابع درستنمایی سعی در جایگزین کردن تابعی بجای لگاریتم تابع درستنمایی دارد. فضای پنهان داده باید طوری انتخاب شود که ماکزیمم کردن آن معادل با ماکزیمم کردن تابع درستنمایی باشد ولی در عین حال محاسبات آن نیز آسان‌تر باشد. با توجه به تعریفی که برای فضای پنهان داده در [3] ارائه شده است، بردار تصادفی \mathbf{X}^S با توزیع احتمال $f(\mathbf{x}; \lambda)$ یک فضای پنهان داده نسبت به λ_S برای $f(\mathbf{x}; \lambda)$ است اگر تابع چگالی احتمال توام \mathbf{X}^S و \mathbf{Y} را بتوان بصورت زیر نوشت:

$$f(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \lambda) = f(\mathbf{y} | \mathbf{x}; \lambda_{\tilde{S}}) f(\mathbf{x}; \lambda_S) \quad (11)$$

بعبارت دیگر باید توزیع شرطی $f(\mathbf{y} | \mathbf{x}; \lambda_{\tilde{S}})$ مستقل از λ_S باشد. با توجه به این تعریف امید شرطی لگاریتم تابع درستنمایی (رابطه ۱۲) می‌تواند جایگزین لگاریتم تابع درستنمایی شود [3].

$$\varphi^S(\lambda_S; \lambda) = E[\log f(\mathbf{X}; \lambda_S, \lambda_{\tilde{S}}) | \mathbf{Y} = \mathbf{y}; \lambda] = \int f(\mathbf{x} | \mathbf{Y} = \mathbf{y}; \lambda) \log f(\mathbf{x}; \lambda_S, \lambda_{\tilde{S}}) d\mathbf{x} \quad (12)$$

به این ترتیب برای اجرای الگوریتم SAGE در تکرار i باید مراحل زیر را اجرا کرد:

۱- انتخاب یک مجموعه اندیس $S = S^i$ ۲- انتخاب فضای پنهان داده \mathbf{X}^{S^i} برای λ_{S^i} ۳- محاسبه رابطه $\varphi^{S^i}(\lambda_{S^i}; \lambda^i)$

$$\lambda_{S^i}^{i+1} = \arg \max_{\lambda_{S^i}} \varphi^{S^i}(\lambda_{S^i}; \lambda^i) \quad \{\lambda_{S^i}^i : (\lambda_{S^i}^i, \lambda_{\tilde{S}^i}^i) \in \Lambda\} \quad \text{محاسبه ۴}$$

$$\lambda_{\tilde{S}^i}^{i+1} = \lambda_{\tilde{S}^i}^i$$

بنابراین لازم خواهد بود که در هر تکرار مجموعه اندیس S^i را انتخاب کنیم. این انتخاب به همان اندازه که یک مهارت می‌باشد به اصول علمی حاکم بر موضوع نیز وابسته است. مجموعه اندیس در الگوریتم‌هایی که تحت عناوین ML-SAGE-1, 2, 3 مطرح شده‌اند تک عضوی می‌باشد و یا به عبارت دیگر در هر تکرار فقط مقدار یک پیکسل تغییر می‌کند [3]. می‌توان نشان داد که اگر فضای پنهان داده را طوری انتخاب کنیم که از میزان اطلاعات کمتری برخوردار باشد سرعت همگرایی بیشتر خواهد شد. طریقه انتخاب فضای پنهان داده در الگوریتم ML-SAGE-3 باعث شده که این روش از سرعت همگرایی بالایی برخوردار گردد (میزان اطلاعات با توجه به ماتریس اطلاعات فیشر^{۱۳} تعریف می‌شود). این در حالی است که در روش ML-EM در هر تکرار تمام پیکسلها تغییر می‌کنند ولی در روش ML-SAGE در هر تکرار محاسبات فقط برای یک پیکسل انجام می‌شود. روابط زیر چگونگی اجرای این الگوریتم را نشان می‌دهند:

$$\lambda_k^{i+1} = \left[\frac{(\lambda_k^i + z_k^i) e_k}{p_k} - z_k^i \right]_+ \quad k = 1, 2, \dots, B \quad (13)$$

با این تعریف که:

$$[x]_+ = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad e_k = \sum_{m=1}^D \frac{p_{mk} y_m^*}{\bar{y}_m} \quad (14)$$

¹¹ Index set

¹² Hidden data space

¹³ Fisher information matrix

$$z_k^i = z_k^{i,(3)} = \min_{m: p_{mk} \neq 0} \left\{ \frac{(r_m + \sum_{j \neq k} p_{mj} \lambda_j^i)}{p_{mk}} \right\} \quad \text{ML-SAGE-3 (15)}$$

۳-۲ الگوریتم Parallel SAGE

در روش ML-EM، در هر تکرار تمامی پیکسلها بطور همزمان تغییر می‌کنند، این موضوع یکی از عوامل کندی سرعت همگرایی این الگوریتم است ولی در مقابل امکان اجرای موازی آنرا بوجود می‌آورد. به عبارت دیگر بین امکان موازی‌سازی و همگرایی سریع یکی را باید انتخاب کنیم. روشی که در این قسمت ارائه می‌دهیم سعی دارد تا به یک روش بینابینی برسد تا علاوه بر سرعت همگرایی مناسب، امکان موازی شدن را هم داشته باشد.

مجموعه اعداد صحیح $S = \{1, 2, 3, \dots, B\}$ در نظر می‌گیریم. این مجموعه را به مجموعه اندیس‌های زیر افراز می‌کنیم:

$$S = \{\{S_1\}, \{S_2\}, \dots, \{S_L\}\} = \{\{S_l\}\}_{l=1}^L \quad (16)$$

$$\tilde{S}_k = \{\{S_l\}\}_{l=1, l \neq k}^L$$

متغیرهای تصادفی پواسن را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_{mk}^l \sim \text{Poisson}\{p_{mk}(\lambda_k + m_k^l)\}$$

$$B_m^l \sim \text{Poisson}\left\{r_m - \sum_{k \in S_l} p_{mk} m_k^l + \sum_{k \in \tilde{S}_l} p_{mk} \lambda_k^i\right\} \quad (17)$$

$\{m_k^l\}$ باید طوری انتخاب شود که پارامتر توزیع پواسن مثبت باشد. با این فرض فضای پنهان داده بصورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$X^l = \left\{ \{M_{mk}^l\}_{k \in S_l}, \{B_m^l\} \right\}_{m=1}^D \quad (18)$$

بر این اساس، امید شرطی لگاریتم تابع درست‌نمایی برابر است با:

$$Q_{X^l}(\lambda; \lambda^i) = E\{\log f(\mathbf{X}^l; \lambda) \mid \mathbf{Y} = \mathbf{y}; \lambda^i\}$$

$$\equiv \sum_{k \in S_l} \left((\lambda_k^i + m_k^l) e_k(\lambda^i) \log(\lambda_k + m_k^l) - p_k(\lambda_k + m_k^l) \right) \quad (19)$$

$$e_k(\lambda^i) = \sum_{m=1}^D p_{mk} \frac{y_m^*}{\bar{y}_m(\lambda^i)}$$

با ماکزیمم کردن این تابع نسبت به λ_k رابطه تکراری زیر بدست می‌آید:

$$\lambda_k^{i+1} = \left[(\lambda_k^i + m_k^l) e_k(\lambda^i) / p_k - m_k^l \right]_+ \quad (20)$$

که با توجه به روابط قبل، پارامترهای $\{m_k^l\}$ بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$m^l = \min_{m: \sum_{k \in S_l} p_{mk} \neq 0} \left\{ \frac{r_m + \sum_{k \in \tilde{S}_l} p_{mk} \lambda_k^i}{\sum_{k \in S_l} p_{mk}} \right\} \quad (21)$$

با توجه به روابط بالا اگر $L = B$ یعنی مجموعه اندیس‌های S_l دارای یک عضو باشند این روش الگوریتم ML-SAGE-3 را نتیجه می‌دهد. در قسمتهای بعد تاثیر انتخاب مجموعه‌های مختلف را بر نرخ همگرایی الگوریتم بررسی می‌کنیم.

۳- شبیه‌سازی

مسئله شبیه‌سازی سیستم PET با توجه به حقایق فیزیکی پیچیده و رفتار آماری اجزاء مختلف آن، موضوع گسترده‌ای است. ما برای بررسی نرخ همگرایی از یک شبیه‌سازی ساده بر اساس تعریف ماتریس انتقال استفاده کرده‌ایم. هدف ما این است که از روی بردار مفروض λ (نرخ تشعشع جفت فوتون از هر پیکسل) بردار y^* (نرخ شمارش انجام شده توسط هر جفت دکتور) را محاسبه کنیم. بر این اساس کافی است تا از رابطه (۷) استفاده کنیم. برای تحقق این رابطه لازم است سه مرحله را انجام دهیم: ۱- محاسبه ماتریس انتقال ۲- تخمینی از متوسط رویدادهای ناخواسته ۳- ایجاد اعداد تصادفی با توزیع پواسن.

در این شبیه‌سازی ماتریس انتقال را بر اساس ساختار یک اسکندر مدل CTI ECAT EXACT HR+ محاسبه کرده‌ایم. این اسکندر شامل چهار حلقه است و روی هر یک ۷۲ عدد بلوک 8×8 از آشکارساز قرار دارد و بنابراین هر حلقه شامل ۵۷۶ آشکارساز می‌باشد. ابعاد هر یک از آشکارسازها حدود ۴ میلی‌متر است و قطر حلقه اسکندر حدود ۸۰ سانتیمتر می‌باشد. فرض می‌کنیم اسکندر ۱۹۲ پروجکشن که هر پروجکشن از ۱۶۰ نمونه تشکیل



شکل ۲. تصویر فانتوم Modified Shepp-Logan به ابعاد 128×128

شده است را جمع‌آوری می‌کند. به این ترتیب قطر محدوده دید (FOV) سیستم حدود ۶۴ سانتیمتر است که اندازه هر پیکسل از تصویری به ابعاد 128×128 حدود ۵ میلی‌متر خواهد بود. با توجه به این توضیحات، ابعاد ماتریس انتقال 30720×16384 می‌شود که در حالات معمولی به حجم بالایی از حافظه نیاز دارد. از آنجایی که این ماتریس یک ماتریس پراکنده می‌باشد می‌توان از این خاصیت استفاده کرده و آنرا در حجم کمتری ذخیره کرد. هر یک از آرایه‌های این ماتریس تعیین کننده یک احتمال است که با توجه به موقعیت مکانی هر پیکسل نسبت به تیوب منتظر آن قابل محاسبه خواهد بود [1][4]. برای شبیه‌سازی از فانتوم Shepp-Logan استفاده کردیم (شکل ۲). هر سطح خاکستری را معادل ده‌هزار جفت فوتون فرض می‌کنیم که در نتیجه متوسط تعداد جفت فوتونهای تشعشع شده از هر پیکسل با رنگ آن پیکسل متناسب است. پس از اینکه به ازای هر پیکسل از تصویر عددی را بعنوان تعداد جفت فوتونهای تشعشع شده از آن پیکسل جایگزین کردیم، بردار تصویر را در ماتریس انتقال ضرب می‌کنیم تا بردار متوسط تعداد جفت فوتونهای آشکار شده در هر تیوب بدست آید. برای بدست آوردن تخمینی از متوسط رویدادهای تصادفی، فرض می‌کنیم درصدی از تعداد جفت فوتونهای شمارش شده در هر تیوب نتیجه وجود نویز باشد. سپس به کمک مولد اعداد تصادفی، به ازای هر یک از اعداد مذکور یک عدد تصادفی پواسن تولید می‌کنیم. این بردار را به عنوان بردار مشاهدات y^* می‌پذیریم.

۴- پیاده‌سازی و ارزیابی

برای مقایسه تصاویر بازسازی شده میانگین مربع خطا را معیار قرار داده‌ایم:

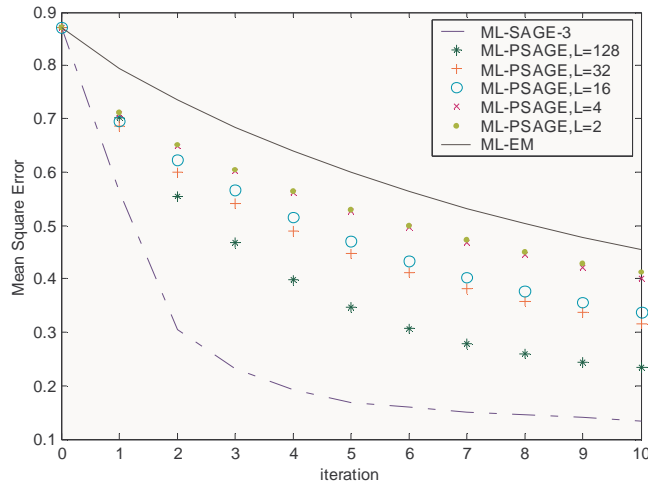
$$MSE(\lambda^i) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^B (\lambda_j^i - \Lambda_j)^2}{\sum_{j=1}^B \Lambda_j^2}} \quad (22)$$

بردار Λ معرف تصویر اصلی است. متوسط تعداد فوتونهای شمارش شده را به عنوان مقدار اولیه برای بردار λ انتخاب می‌کنیم، به عبارت دیگر:

$$\lambda_j^{(0)} = \frac{\sum_{m=1}^D y_m^*}{B} \quad j = 1, \dots, B \quad (23)$$

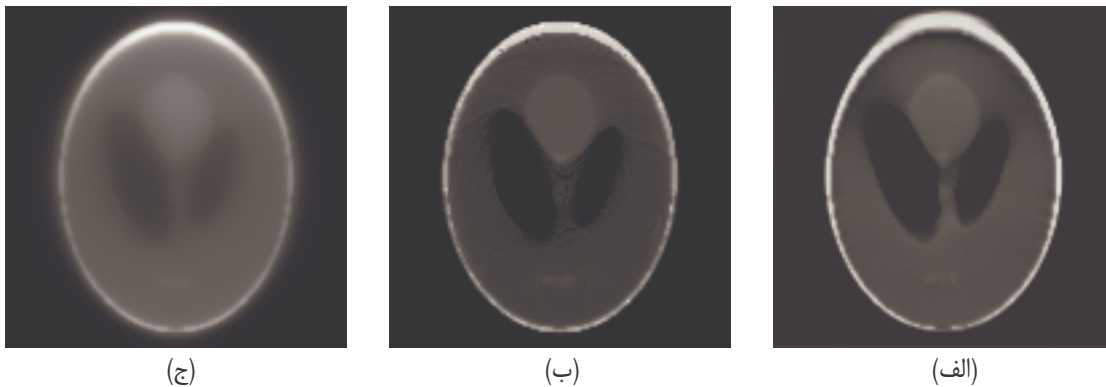
برای اینکه اثر رویدادهای تصادفی را هم دخالت دهیم به اندازه ۱۰ درصد داده‌های شبیه‌سازی شده نویز اضافه کرده‌ایم.

شکل ۳ منحنی میانگین مربع خطا را برای نمونه شبیه‌سازی شده نشان می‌دهد. همانطور که در شکل نیز مشخص است نرخ همگرایی الگوریتم ML-SAGE-3 نسبت به روش ML-EM بسیار بالاتر می‌باشد. هر چقدر پارامتر L (تعداد مجموعه‌های اندیس) در الگوریتم ML-PSAGE را افزایش دهیم نرخ همگرایی این الگوریتم نیز زیاد می‌شود. عمده‌بار محاسباتی در الگوریتم ML-EM مربوط به ضرب ماتریس انتقال در یک بردار می‌باشد (رابطه ۹). از آنجایی که ضرب یک ماتریس از مواردی است که به راحتی می‌توان آنرا در قالب پردازش‌های موازی انجام داد لذا این الگوریتم قابلیت اجرا بر روی سیستم‌ها پردازش موازی را دارد. در روش ML-SAGE-3 با توجه به اینکه رابطه تکرار (۱۳) برای هر یک از پیکسل‌های تصویر با توجه به مقادیر سایر پیکسلها بدست می‌آید لذا نمی‌توان آنرا به



شکل ۳. منحنی میانگین مربع خطا در هر تکرار برای تصویر شبیه‌سازی شده.

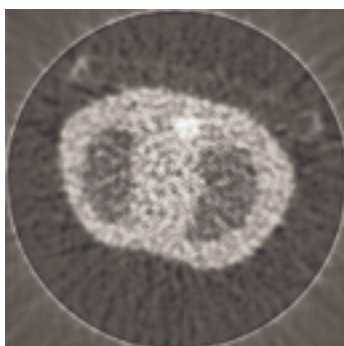
صورت ضرب ماتریسی اجرا کرد. در واقع در این الگوریتم ضرب ماتریسی به ضرب یک بردار در یک سطر یا یک ستون از ماتریس انتقال تبدیل می‌شود. در الگوریتم ML-PSAGE با انتخاب پارامتر L ماتریس انتقال را به چند ماتریس کوچکتر تقسیم می‌کنیم. بدیهی است زیاد کردن این پارامتر از توانایی موازی شدن این الگوریتم می‌کاهد. در شکل ۳ نرخ همگرایی این الگوریتم برای L های ۲، ۴، ۱۶، ۳۲ و ۱۲۸ بدست آمده‌اند.



شکل ۴. الف - تصویر بازسازی شده به روش ML-SAGE-3 ب - تصویر بازسازی شده به روش ML-PSAGE, L=128 ج - تصویر بازسازی شده به روش ML-EM بعد از ده تکرار.

یکی از نکات قابل بررسی نحوه انتخاب مجموعه اندیس می‌باشد. اگر مجموعه اندیس را در طول اجرای الگوریتم ثابت بگیریم تصویری که بدست می‌آید دارای مرزهای غیر واقعی بین پیکسل‌های هر مجموعه اندیس می‌باشد (برای مثال اگر پیکسلها را بصورت شبکه‌ای شطرنجی تقسیم‌بندی کنیم در تصویر ایجاد شده این شبکه قابل تشخیص خواهد بود). یک راه‌حل پیشنهادی می‌تواند انتخاب دینامیکی مجموعه اندیس باشد. برای این کار کافی است در هر تکرار عناصر مجموعه اندیس را تغییر دهیم. روشی که در این تحقیق موثر واقع شد، انتخاب مجموعه اندیس با توجه به میزان روشنایی هر یک از پیکسلها است. برای مثال اگر $L=4$ باشد در هر تکرار چهار مجموعه اندیس را بر اساس میزان تشعشع هر پیکسل ایجاد می‌کنیم این روش علاوه بر اینکه الگوی خاصی را به الگوریتم تحمیل نمی‌کند بلکه باعث می‌شود تا اجزاء تصویر سریعتر شکل بگیرند. بر این اساس شکل ۴ تصاویر بازسازی شده به سه روش ML-EM و ML-SAGE-3 و ML-PSAGE با

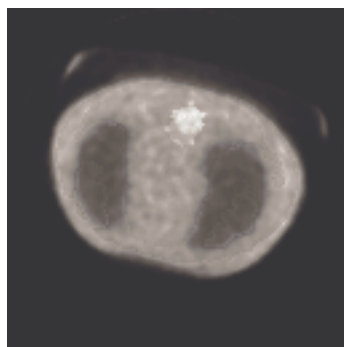
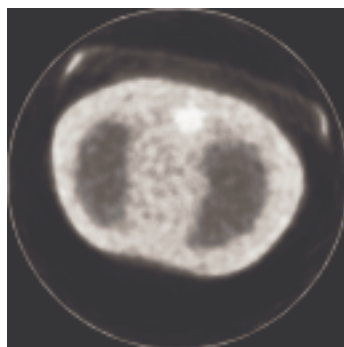
L=۱۲۸ را بعد از ده تکرار نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود تصویر ایجاد شده به روش بیان شده از نظر کیفی به روش ML-SAGE-3 نزدیک است.



برای اینکه بتوان تصاویر ایجاد شده را بهتر ارزیابی کنیم الگوریتم‌های مورد نظر را بر روی داده‌های واقعی نیز اجرا شده‌اند. به این منظور از داده‌هایی که توسط یک اسکنر PET مدل CTI ECAT EXACT تولید شده استفاده کردیم. این تصاویر از مقطعی از قفسه سینه تهیه شده‌اند. شکل ۵ تصاویر بازسازی شده به روشهای FBP، ML-EM، و روش ML-PSAGE, L=16 را نشان می‌دهند.

۵- نتیجه‌گیری

همانطور که از تصاویر و منحنی‌های خطا مشخص است استفاده از روش ML-PSAGE می‌تواند علاوه بر اینکه باعث افزایش نرخ سرعت همگرایی شود امکان اجرای موازی را هم حفظ کند. انتخاب بهینه پارامتر L به نوع پردازشگر موازی و طریقه اجرای موازی الگوریتم وابسته است. بدیهی است در سیستم‌هایی که از یک حافظه مشترک بهره می‌برند می‌توان این پارامتر را طوری انتخاب کرد که تعداد کمی از پیکسلها در هر تکرار مقداردهی شوند. بویژه در سیستم 3D PET که تعداد پروجکشنها بسیار زیاد هستند این روش می‌تواند کارساز باشد. لازم به ذکر است که زمان لازم برای هر تکرار در الگوریتم‌های ML-SAGE-3 و ML-PSAGE بیشتر از ML-EM خواهد بود ولی این زمان کاملاً به نحوه پیاده‌سازی این روشها بستگی دارد و می‌توان این اختلاف را با تمهیداتی کاهش داد.



۶- مراجع

- [1] C.H. Hsu, "A study of lesion contrast recovery for iterative PET image reconstructions versus filtered backprojection using an anthropomorphic thoracic phantom", Computerized Medical Imaging and Graphics, 26, 119-127, 2002
- [2] Shepp L., Y. Vardi, "Maximum Likelihood Reconstruction for Emission Tomography", IEEE Trans. Med. Imaging, pp 113-122, 1982
- [3] Fessler J.A., A.O. Hero, "Space Alternating Generalized Expectation Maximization Algorithm", IEEE Tran. Sig. Proc, vol 4, No 10, pp 1417-1429, 1995.
- [4] G. Kontaxakis, et al, "Iterative Image Reconstruction for Clinical PET Using Ordered Subsets Median Root Prior, and a Web-Based Interface", Molecular Imaging and Biology Vol. 4, No. 3, 219-231, 2002.

شکل ۵: تصاویر بازسازی شده از روی داده‌های یک سیستم واقعی. الف - تصویر بازسازی شده به روش FBP ب - تصویر بازسازی شده به روش ML-EM بعد از ۲۰ تکرار ج - تصویر بازسازی شده به روش ML-PSAGE, L=16 بعد از ۲۰ تکرار.